Instituto de Matemática
Campus Curicó

Prueba Nº3
Álgebra lineal

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

<u>**Instrucciones**</u>:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1+\dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) **[25 ptos]** Considere la transformación lineal $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, definida por la ecuación:

$$T(ax+b) = ax^2 + (a+b)x$$

   a) **[6 ptos.]** Caracterice el $\mathrm{Ker}(T)$ y calcule la nulidad de T

   b) **[7 ptos.]** Calcule el rango de T y encuentre una base para la $\mathrm{Im}(T)$.

   c) **[6 ptos.]** Calcule $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$, donde $\mathcal{B}_1 = \{1, 1-x\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{1, x, (1-x)^2\}$

   d) **[6 ptos.]** ¿Es T un isomorfismo?

2) **[15 ptos]** Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1,1), (1,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Considere

$$A = [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Determine:

   a) **[8 pts]** $[T(1,1,0)]_{\mathcal{B}_2}$

   b) **[7 pts]** $T(3,2,1)$

3) **[20 ptos]** Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) **[10 pts]** Prueba que A diagonalizable. **(Justifique)**

   b) **[10 pts]** Hallar la matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es la matriz diagonal formada por los valores propios de A.

Pauta :

1) *a*) Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \,:\, T(p(x)) = 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \,:\, T(ax+b) = 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \,:\, ax^2 + (a+b)x = 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \,:\, a+b = 0 \,\wedge\, b = 0\} \\
&= \{p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \,:\, a = 0 \,\wedge\, b = 0\}
\end{aligned}$$

[4 pts]

....

Por lo tanto el $\mathrm{Ker}(T) = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$ **[1 pto]**

....

Entonces, la nulidad de T es: $\mu(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$ **[1 pto]**

....

b) Por la fórmula de la dimensión se decude que el rango de T es: $\rho(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$.
[3 pts]

....

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(T) &= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, \exists\, p(x) \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \;:\; T(p(x)) = q(x)\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, \exists\, ax+b \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \;:\; T(ax+b) = c + dx + ex^2\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, \exists\, a,b \in \mathbb{R} \;:\; (a+b)x + ax^2 = c + dx + ex^2\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, \exists\, a,b \in \mathbb{R} \;:\; c = 0\,, a+b = d\,, a = e\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, q(x) = c + dx + ex^2 \,\wedge\, c = 0\} \\
&= \{q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, q(x) = dx + ex^2,\; d, e \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto el $\mathrm{Im}(T) = \langle x, x^2 \rangle$ **[4 pts]**

....

c) Se tiene

$$\begin{aligned}
T(1) &= 0 \cdot x^2 + (0+1) \cdot x^2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot (1-x)^2 \\
T(1-x) &= T(-x+1) = -x^2 + (1-1) \cdot x = 1 \cdot 1 - 2 \cdot x - 1 \cdot (1-x)^2
\end{aligned}$$

[4 pts]

....

Por lo tanto $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **[2 pts]**

d) Claramente T no es un isomorfismo, pues $\dim(\mathrm{Im}(T)) \neq \dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ **[6 pts]**

. . . .

2) *a*) Note que $[(1,1,0)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto **[3 pts]**

. . . .

$$[T(1,1,0)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot [(1,1,0)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[5 pts]

. . . .

b) Note que $(3,2,1) = \alpha \cdot (1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma \cdot (1,0,0)$

de donde se concluye que $[(3,2,1)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **[2 pts]**

. . . .

Además, se tiene: $[T(3,2,1)]_{\mathcal{B}_2} = [T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2} \cdot [(3,2,1)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

[3 pts]

. . . .

Por lo tanto $T(3,2,1) = 0 \cdot (1,1) + 2 \cdot (1,-1) = (2,-2)$ **[2 pts]**

. . . .

3) *a*) Calculemos el polinomio característico

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = |A - \lambda\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -(-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(-2-\lambda) \cdot [(1-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 9] \\ &= (\lambda+2) \cdot [1 - 2\lambda + \lambda^2 - 9] \\ &= (\lambda+2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

Luego, los valores propios son: $\lambda = -2$ (raiz doble), $\lambda = 4$. **[5 pts]**

. . . .

Calculemos la dimensión de cada subespacio propio $\mathbf{E}_\lambda$:

- $\dim(\mathbf{E}_4) = 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$ **[2 pts]**

  . . . .

- $\dim(\mathbf{E}_{-2}) = 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$ **[2 pts]**

  . . . .

Como $\dim(\mathbf{E}_4) + \dim(\mathbf{E}_{-2}) = 3$, tenemos que A es diagonalizable **[1 pto]** *b)*

- Para $\lambda = 4$, debemos resolver el sistema $(A - 4\mathbb{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

Luego, una base de $\mathbf{E}_1$ es $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}_1} = \{(1, 1, 1)\}$. **[4 pts]**

. . . .

- Para $\lambda = -2$, debemos resolver el sistema $(A + 2\mathbb{I}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0)$$

Luego, una base de $\mathbf{E}_{-2}$ es $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}_{-1}} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ **[5 pts]**

. . . .

Luego $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ las cuales cumplen que:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[2 pts]

. . . .